L'incomplétude des mathématiques et de la logique | Par Marie Bonichon

Une première approche du théorème d'incomplétude de Kurt Gödel

[Access the english version of the same article]

[Read the advanced mathematical explanation of this theorem (in english only)]

On pense souvent que les mathématiques sont une science dont le formalisme logique serait parfait. Toutefois, la volonté d'axiomatiser, c'est-à-dire de former de nouveaux axiomes, des propriétés admises sans démonstration, puis l'avancée des mathématiques du XIXème siècle ont conduit les sciences formelles à prendre la mesure de leurs limites intrinsèques.

Jusqu'au XIXème siècle, les axiomes sont essentiellement utilisés pour la géométrie. Les mathématiciens des années 1900 cherchent à axiomatiser l'arithmétique. Le 9 aout 1900 des mathématiciens tels qu'Henri Poincaré et Bertrand Russel se réunissent à Paris pour le Deuxième Congrès de Mathématiques ; c'est là que David Hilbert, un mathématicien allemand, énonce 23 problèmes qui ont pour but de faire évoluer les mathématiques et de corriger ses imperfections. Ce nouveau défi n'est toujours pas relevé puisque neuf de ces problèmes n'ont toujours pas trouvé leur solution et il est certain désormais que certains d'entre eux ne trouveront jamais de solution. En effet en 1900 David Hilbert ignore le fait que les mathématiques ne peuvent être un système cohérent et complet ; c'est Kurt Gödel qui va montrer plus tard qu'il n'existe pas de solution à 2 des 23 problèmes et ceci pour des raisons systémiques et non pas liées à notre ignorance. Le théorème d'incomplétude est né, le rêve d'une mathématique et complète est mort.

Si l'on veut énoncer de façon très simplifiée ce théorème on dira essentiellement ceci :

Pour toute théorie arithmétique, et même pour tout système formel en général, on admet des propositions dont la théorie – ou le système – ne peut décider ni de la vérité, ni de la fausseté.

S'il serait trop ambitieux de vouloir exposer le détail mathématique de ce théorème on peut toutefois s'en donner une idée assez claire moyennant un célèbre paradoxe logique que l'on attribue à Bertrand Russel ; celui-ci porte sur la théorie des ensembles :

1) On appelle un ensemble normal un ensemble qui ne se contient pas lui-même

2) On appelle un ensemble non-normal un ensemble qui se contient lui-même

3) Quelle est donc la nature de l'ensemble de tous les ensembles normaux ?

4) S'il est normal, il ne doit pas se contenir lui-même.

5) Mais il contient les ensembles normaux, donc il devrait être non-normal.

6) Cependant s'il est non-normal, il doit se contenir lui-même et alors il est l'ensemble non-normal des ensembles normaux, ce qui n'a pas de sens car alors il ne se contient plus lui-même et il est donc forcément normal, etc.

On le voit ici, les propositions 5 et 6 sont indécidables : le système de définition (c'est-à-dire les propositions 1 et 2) débouche nécessairement sur l'impossibilité de déterminer la vérité ou la fausseté des propositions 5 et 6, qui en sont pourtant les conséquences logiques immédiates.

Russel proposera de se figurer cette théorie au moyen du paradoxe suivant, dit « paradoxe du barbier » :

« Le conseil municipal d'un village arrête une ordonnance qui enjoint à son barbier (masculin) de raser tous les habitants masculins du village qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-ci. Le barbier, qui est bien un habitant du village, n'a pas pu respecter cette règle car :

- "S'il se rase lui-même, il enfreint la règle, car le barbier ne peut raser que les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes ;

- "S'il ne se rase pas lui-même (qu'il se fasse raser ou qu'il conserve la barbe), il est en tort également, car il a la charge de raser les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes. Cette règle est donc inapplicable. (…)»

Pour Kurt Gödel, tout commence en 1906, à Vienne. Né dans une famille germanique propriétaire d'une petite usine de textile, il accède a une bonne éducation au cours de laquelle il se fait remarquer pour son esprit scientifique et notamment son attrait pour les mathématiques. Il poursuit donc ses études a l'université de Vienne en physique puis en mathématiques. Il devient membre de différents groupes de mathématiciens dont il s'éloigne assez rapidement. En 1930, alors âgé de 24 ans, soutient sa thèse qui réfléchit notamment sur la différence entre les propositions mathématiques et les propositions métamathématiques.

Les propositions métamathématiques sont celles qui, dans un calcul ou une démonstration ne donnent pas d'informations mathématiques. Une proposition comme « soit x la variable » est métamathématique, tandis que 1+1=2 est une proposition mathématique.

Sa démarche consiste à associer des nombres à chaque proposition métamathématique afin que tout le système arithmétique soit codé. Il arrive alors à démontrer l'existence d'un nombre G tel que G ne soit soumis à aucune loi mathématique, c'est-à-dire que G n'est la solution d'aucune loi. Ce nombre G a permis au mathématicien d'affirmer que « Dans n'importe quel système finiment axiomatisé, cohérent et capable de formaliser l'arithmétique, on peut construire une proposition qui ne peut être ni prouvée ni réfutée dans ce système. »

Cela revient à dire que dans tous systèmes de codes qui pourtant répondent aux lois mathématiques, il existe une proposition qu'il faut admettre arbitrairement car on ne peut ni montrer sa légitimité ni dire qu'elle est fausse : il s'agit des propositions indécidables. Elles sont « indécidables » dans le sens ou elles ne sont que des conjectures et on ne sait pas si on peut les utiliser comme des axiomes ou si on peut ne pas en tenir compte, un peu à la manière des propositions 5 et 6 du paradoxe des ensembles normaux. Par exemple, la conjecture de Goldbach est une indécidable car elle affirme que tout nombre pair est une somme de nombres premiers (des nombres qui n'ont pas d'autres diviseurs entiers que 1 et eux-mêmes). Ceci parait juste si on note les rapports suivants : [8=3+5 ; 58=53+5…] Cependant cette conjecture n'est toujours pas démontrée, ni même réfutée. Ainsi, les mathématiciens qui utilisent des propositions indécidables sont contraints de faire un choix dans leur raisonnement ; cela revient à dire qu'ils sont contraints de décider arbitrairement de la valeur de vérité ou de fausseté de certaines propositions. Ainsi au cours d'une démonstration, si le mathématicien utilise une indécidable, il émet une hypothèse qui lui permet d'obtenir un résultat ; toutefois, la démonstration qu'il aura faite avant de « décider » reste véritable, mais on peut du coup obtenir plusieurs résultats pour un même problème car le début du raisonnement sera le même. Deux mathématiciens peuvent alors décider de faire deux choix différents. En cela, Gödel montre que les mathématiques ne sont pas la science complète et parfaite et fait tomber une croyance qui remonte à l'antiquité Grecque, voire Egyptienne.

Plus tard il appuiera sa thèse en publiant un deuxième théorème disant que dans une théorie cohérente, ce qui rend la théorie cohérente est indécidable par rapport à la théorie

(« Si T est une théorie cohérente, tout énoncé de T qui affirme la cohérence de T est un indécidable de T»). Gödel remet donc définitivement en cause la définition des mathématiques en tant que système cohérent et complet. Ainsi, grâce au tournant que les mathématiques ont pu connaitre au XXème siècle et à l'émergence de paradoxes, Kurt Gödel a su montrer que les mathématiques sont un système fini qui a ses limites comme tout autre système. On est alors en droit de se poser la question suivante : constater qu'un système est fini et incomplet, n'est-ce pas se référer à une catégorie logique supérieure, seule à même d'élaborer un tel critère de signification ? Autrement dit, qu'est-ce qui dans la logique de notre esprit permet ne serait-ce que de s'être posé la question du caractère complet ou incomplet d'un savoir.

Cela veut-il dire, comme le pensait Platon, qu'il existe forcément un savoir infini dont le savoir fini des mathématiques dépend ultérieurement ? Ou bien cela veut-il dire qu'il n'existe tout simplement pas de savoir infini ? Mais, le cas échéant, d'où provient ce questionnement sur la nature finie du fini ? Le théorème de Gödel montre qu'un système fini ne se comprend pas lui-même. Dans ce cas il faut certainement admettre qu'il y a comme un autre moment de notre pensée qui est capable de produire une telle compréhension. Ce moment de la pensée demeure un moment logique, puisqu'il s'agit de déterminer la nature finie de la logique formelle. Il y a donc forcément une logique de l'esprit qui précède la seule logique formelle, une logique capable de montrer le caractère fini de celle-ci, celle-là même que nous venons d'utiliser ici.

Read the advanced mathematical explanation of this theorem