Des Champs aux clôtures algébriques | Par David Soquet

Une histoire des équations

“Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.” *

Leopold Kronecker (1823;1891)

Le bon Dieu a fait les nombres entiers, tous les autres sont l’œuvre de l’homme.

La grandes crue annuelle du Nil était à la fois attendue et redoutée par les fermiers de l’Egypte antique. En effet, si elle permettait une fertilisation exceptionnelle des champs environnants, elle effaçait aussi toutes les frontières délimitant les propriétés de chacun. Cela dérangeait également le Pharaon dont les taxes étaient proportionnelles à la superficie des biens. Ce double problème est, dit-on, à l’origine des premiers balbutiements de la géométrie, littéralement : la mesure de la terre. Les arpenteurs égyptiens développèrent des méthodes (parfois approximatives) pour calculer l’aire de figures simples mais aussi pour bâtir les célèbres pyramides. Ils étaient aussi capables de résoudre des problèmes tels que celui-ci :

« Avant la crue annuelle, un fermier possédait deux champs carrés. L’un avait un côté de 60 coudées de longueur (environ 30 mètres) et l’autre de 80 coudées (environ 40 mètres). Le fermier souhaite que ses deux champs soient réunis en un seul champ carré sans bien sûr perdre en superficie totale. »

Après quelques millénaires, leur renommée devint si grande qu’ils reçurent la visite de plusieurs grands savants de l’antiquité comme par exemple **Thalès** (-625;-547) et **Pythagore** (-580;-497).

Ce dernier est aujourd’hui connu comme l’auteur du fameux théorème qui donne la solution au problème précédent. La somme des aires des deux anciens champs 60^2+80^2 est égale à celle du nouveau champ 100^2 et surtout ce dernier carré se construit simplement sur le troisième côté du triangle rectangle formé par les deux autres. Ce résultat avait aussi été découvert par les Babyloniens et les Chinois mais c'est à Pythagore que l'on attribue la première démonstration rigoureuse. Comme nous le verrons plus tard, et de façon assez ironique, c'est ce théorème qui amènera Pythagore à se confronter à *l'impossible mathématique*.

Dans le domaine des mathématiques, l'Histoire montre que l'impossible a régulièrement un caractère temporaire, simplement parce qu'une question a été posée dans un cadre trop restreint. C'est le cas des équations dont les développements successifs permettent de comprendre les différences de nature entre les nombres. Prenons par exemple le problème suivant :

« Si j'ajoute le double d'un nombre à 7, j'obtiens 23. Combien vaut ce nombre ? »

Dans le langage moderne, ce problème se traduit simplement par l'équation : $2 \times X + 7 = 23$ dans laquelle X joue le rôle du nombre cherché. On peut tout de suite remarquer que les trois nombres connus qui interviennent dans l'équation (2, 7 et 23) appartiennent tous à la catégorie des nombres entiers naturels (ensemble noté **N**) et l'on peut se demander alors s'il est implicite que X doive appartenir à cette même catégorie. Dans notre exemple, le nombre 8 (la *solution* de l'équation) est bien un entier naturel. Mais supposons que l'on remplace 23 par 3 pour avoir cette fois-ci l'équation : $2 \times X + 7 = 3$. Dans ce cas, il est très simple de vérifier qu'aucun entier positif ne satisfait l'égalité. On peut donc dire que ce problème est *impossible* dans l'ensemble des entiers naturels.

Pourtant un jeune collégien sait très bien que le nombre -2 convient. Cela signifie que pour rendre ce problème possible, il est nécessaire de « créer » un nouveau type de nombre : les nombres *négatifs*. Les mathématiciens obtiennent alors l'ensemble des nombres entiers relatifs (noté **Z**, de l'allemand **Z**ahlen) qui incluent aussi bien 8 que -2. Cette construction ne semble a priori pas très complexe. L'analogie avec la notion de dettes qui permet une approche simple est assez intuitive et même ancienne puisqu'on en retrouve trace dans les mathématiques chinoises de l'antiquité ou encore plus tard chez l'Indien Âryabhata (476;550). Cependant, l'acquisition des règles de calcul avec les nombres négatifs nécessite une certaine abstraction et plusieurs grands mathématiciens s'y sont heurté avec difficulté. Par exemple, le grec Diophante (IIIe siècle) et le français Nicolas Chuquet (XVe siècle) parlent tous les deux de solutions *absurdes*. Le perse **Al-Khawarizmi** (783;850) préfère les contourner dans son traité sur l'algèbre.

Et même **d'Alembert** (1717-1783), dont nous reparlerons, doit s'avouer vaincu, comme l'illustre cet extrait de l'Encyclopédie :

"Il n'y a donc point réellement & absolument de quantité négative isolée: -3 pris abstraitement ne présente à l'esprit aucune idée."

Il n'est donc pas étonnant que les élèves aient encore du mal aujourd'hui à manipuler ces nombres…

Poursuivons avec cette fois-ci l'équation : $2 \times X + 7 = 20$.

Une petite modification montre que cela revient à chercher un nombre dont le double vaut 13. Or, s'il y a une chose que les arithméticiens grecs (tels Diophante) savaient, c'est qu'il est souvent pratique de séparer les nombres entiers naturels en deux groupes : les pairs et les impairs. Et les nombres impairs (comme 13) sont justement ceux qui ne sont pas le double d'un autre nombre entier. Notre nouvelle équation est donc impossible dans l'ensemble **N**. On voit rapidement qu'elle l'est également dans **Z**.

Bien entendu l'égalité $2 \times 6{,}5 = 13$ apporte la solution à notre équation et cela ne pose problème ni à un collégien ni à un adulte habitué à manipuler les nombres décimaux tels que 6,5 (ensemble noté **D**). Pourtant, encore une fois, l'histoire joue avec notre intuition puisque pour voir le jour, ce type de nombre a dû attendre la prolifération du système décimal avec les dix chiffres inventés par les Indiens et transmis en occident pendant les invasions arabes, au Xe siècle. Ensuite, ce n'est qu'au XVIe siècle que le flamand **Simon Stevin** (1548-1620) facilitera leur utilisation en inventant la notation décimale dans *La Disme*

(1586). Il utilise une notation toutefois un peu lourde qui sera rapidement améliorée par l'italien Magini qui, en 1592, a l'idée du point décimal. Pour l'anecdote, la « virgule décimale » ne sera introduite qu'une quinzaine d'années plus tard par le néerlandais **Willebrord Snell** (1580-1626).

Avant Stevin, les mathématiciens utilisaient les fractions décimales écrivant le nombre 6,5 sous la forme $6\frac{5}{10}$. Il se trouve en effet que l'usage des fractions est bien antérieur à celui des nombres décimaux. Cela n'est pas surprenant car lorsque l'on est amené à « casser » un nombre entier, il est plus naturel de le faire en deux, trois ou quatre morceaux plutôt qu'en dix, surtout si on n'a pas un système numérique basé sur le nombre 10, comme c'était le cas par exemple des Babyloniens qui utilisaient la base 60 et dont l'héritage s'est perpétué jusque dans notre partage des heures et des minutes. Pour Diophante l'équation $2\times X+7=20$ ne posait donc aucun problème, la solution était le nombre $6\frac{1}{2}$ ou encore $\frac{13}{2}$. Outre les entiers naturels, les fractions étaient d'ailleurs les seuls autres nombres connus par les mathématiciens de l'antiquité. Aujourd'hui, ces nombres définis comme des quotients de deux entiers forment l'ensemble **Q** des nombres rationnels (du latin ratio) qui, conformément à la construction en « poupées russes », contient les ensembles **D**, **Z** et **N**.

La première étape de notre voyage se termine ici puisque toutes les équations de la forme $A\times X+B=C$ où les lettres *A, B* et *C* désignent des nombres rationnels ont une solution qui est un nombre rationnel. Ce résultat découle d'un principe fondamental simple qui peut s'énoncer ainsi :

« Si on ajoute, soustrait, multiplie ou divise deux nombres rationnels, on obtient un nombre rationnel. »

Autrement dit les opérations de base dans **Q** ne permettent pas de sortir de **Q**. Dans la théorie de l'algèbre moderne, un tel ensemble est appelé un corps. On parle alors du corps des rationnels. Le lecteur pourra vérifier par lui-même que cela ne fonctionne pas pour les ensembles **D**, **Z** ou **N**.

Pour poursuivre notre périple, il nous faut maintenant revenir à Pythagore. Les quelques éléments introduits sur la nature des nombres permettent maintenant de comprendre un aspect de la philosophie pythagoricienne qui peut se résumer par cette citation : « *Tout est nombre. Les nombres sont le principe et la source de toutes choses.* »

Autrement dit, tout ce qui existe peut être représenté par un nombre. Par nombre, il faut ici comprendre nombre entier (positif) ou nombre rationnel. Le fait que Pythagore ne connaissait pas les négatifs ou les décimaux ne change rien car, comme nous venons de le voir, ces nombres sont aujourd'hui inclus dans l'ensemble des rationnels.

Selon Pythagore, toute grandeur est ***mesurable*** par un nombre entier ou une fraction. Une autre façon de comprendre ceci est la suivante. Si on prend deux grandeurs quelconques alors l'une des deux est obligatoirement une fraction de l'autre. Cela signifie que l'on peut « mesurer » un certain nombre *entier* de fois l'une à l'aide d'un certain nombre *entier* de fois l'autre. Par exemple, si la longueur d'une branche d'un arbre est égale aux deux septièmes de la longueur du tronc alors il est évident que deux fois la longueur du tronc correspond à sept fois la longueur de la branche. On dit alors que ces deux grandeurs sont **commensurables**.

Avant d'aborder les développements de Pythagore, une digression est ici nécessaire pour expliquer ce que les mathématiciens appellent un nombre constructible. C'est a priori très simple : tout segment construit possède une longueur qui est représentée par un nombre. S'il est possible de construire un segment de longueur un nombre donné alors ce nombre est constructible. La subtilité réside en fait sur la méthode utilisée pour construire le segment. Pour les mathématiciens grecs, une construction « digne de ce nom » ne nécessitait l'utilisation que du compas et de la règle (non graduée). Ainsi, tous les points construits (et par suite les segments) ne pouvaient être que des intersections de droites ou de cercles. Ce n'est pas un hasard si **Euclide** (-325;-265) fit de la construction du cercle et de la droite deux des cinq postulats de sa géométrie dans *Les élements*. C'est sûrement dans cette tradition qu'aujourd'hui encore on enseigne aux collégiens les constructions de la médiatrice d'un segment et de la bissectrice d'un angle à l'aide du compas. Par ailleurs l'italien **Lorenzo Mascheroni** (1750;1800) démontra même en 1797 que tout point constructible avec la règle et le compas, l'est aussi avec le compas seul. C'est par exemple l'objet du fameux ***problème de Napoléon*** qui demande de retrouver le centre d'un cercle donné.

Il est facile de voir comment tous les nombres entiers sont constructibles à partir d'un segment donné auquel on attribue la valeur 1: il suffit de reporter la distance avec le compas. Plus intéressant, l'exemple donné de la médiatrice permet de retrouver le milieu d'un segment donné. Cela montre que le nombre $\frac{1}{2}$ est constructible. Pythagore utilise alors des résultats attribués à **Thalès (-624;-547)** sur les droites parallèles pour expliquer comment on peut « construire » tous les nombres rationnels. Il aboutit ainsi à la première étape de sa philosophie : « Tous les nombres (rationnels) sont constructibles. » Cependant, pour justifier son principe du « Tout est nombre », Pythagore doit surtout prouver que tous les nombres constructibles sont des nombres rationnels.

C'est ici qu'intervient le problème du doublement de l'aire d'un carré ou comment, à partir d'un carré donné, construire (à la règle et au compas) un carré dont l'aire est deux fois plus grande. Ce problème (que l'on retrouve notamment dans le Ménon de Platon) était bien connu de Pythagore puisqu'il correspond à un cas particulier du théorème indiqué au début. Partons d'un carré de côté 1 et traçons une de ses diagonales faisant ainsi apparaitre deux triangles rectangles isocèles. Chacun des carrés construits sur les côtés perpendiculaires d'un des triangles a une aire égale à 1. Alors d'après le « théorème de Pythagore » l'aire du carré construit sur l'hypoténuse (la diagonale du carré) a une aire égale à 2, soit le double de celle du carré de départ.

La question posée par Pythagore est alors : quelle est la longueur de cette diagonale ?

Remarquons pour commencer qu'il est évident que la diagonale du carré est constructible à partir de son côté. Autrement dit, pour que la philosophie pythagoricienne soit vraie et cohérente, il fallait absolument que ces deux grandeurs (le côté et la diagonale) soient commensurables. D'autre part, puisque c'est la diagonale qui permet de doubler l'aire d'un carré, Pythagore savait aussi que le carré de ce nombre était égal à 2. Voilà quel fût donc sûrement l'objet de longues nuits de recherche : **trouver une fraction dont le carré est égal à 2.**

Si on note X la longueur du côté du carré, le problème en question revient à résoudre l'équation $X^2 = 2$. Tout de suite on voit que cette équation n'est pas du même type que les précédentes. La présence de l'*exposant* 2 sur le X en fait une équation du *deuxième* degré. Toutes les équations qui avaient leur solution dans **Q** étaient du *premier* degré.

Plusieurs historiens attribuent à **Hippase de Métaponte** la démonstration du fait qu'aucun nombre rationnel ne peut satisfaire cette équation, remettant ainsi en cause les croyances des pythagoriciens.

E

ncore une fois, si on veut que cette équation ait une solution il faut créer un nouveau type de nombre. Pour notre problème, il s'agit du nombre positif dont le carré est égal à 2, dont la notation actuelle $\sqrt{2}$ ne date que du XVIe siècle. Ce fut sans doute le premier mais très vite ont suivi $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ et donc également $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le fameux nombre d'or. Par opposition aux rationnels, ces nombres sont dits *irrationnels* et cela implique évidemment que ce nouvel ensemble de nombres ne contient pas **Q**, il y est plutôt « parallèle ». Cependant, l'ensemble contenant les nombres rationnels et les nombres irrationnels constitue **l'ensemble des nombres réels**, noté **R**.

Ce nouvel ensemble est vraiment très riche. Il contient bien sûr tous les nombres rencontrés jusqu'à présent mais aussi par exemple les nombres $\sqrt[3]{7}$, $\boldsymbol{\pi}$ (il faudra attendre la fin du 18e siècle pour avoir une démonstration de son irrationnalité) ou $\boldsymbol{e}$, la base du logarithme népérien. On y trouve aussi quelques nombres un peu plus farfelus tels que $\frac{63}{25}\times\frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}$ une très bonne approximation du nombre $\boldsymbol{\pi}$ due à l'indien **Ramanujan** (1887;1920) ou encore le nombre $e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743{,}99999999999992$, appelé constante de Ramanujan et qui pour un peu serait un nombre entier.

L'ensemble **R** permet surtout d'aborder des équations bien plus diverses (et difficiles) dont le degré n'a plus de limite. En voici quelques exemples que nous ne chercherons pas à résoudre ici :

$$(i)\, 3X^2 - 7X + 2 = 0 \quad (ii)\, 13X^5 = 12 \quad (iii)\, X^3 - X + 1 = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X}$$

$$(iv)\, \sqrt{3}X^2 - \frac{7}{\sqrt{2}}X + 2 = 0$$

En revanche, dans le prolongement de ce que nous avons vu jusqu'ici, trois questions se posent auxquelles nous répondrons plus ou moins dans l'ordre :

1. Les nombres irrationnels sont-ils <u>tous</u> constructibles comme le sont les rationnels ou $\sqrt{2}$?
2. La création de nouveaux nombres pour résoudre les équations s'arrête-t-elle avec les nombres réels ?
3. Sous quelle forme les solutions des équations précédentes peuvent-elles s'écrire ?

Malgré la définition récente de « nombre constructible », la première question est sans aucun doute la plus ancienne en raison de la volonté des mathématiciens grecs de tout construire à la règle et au compas. Cette volonté ne s'arrêtait d'ailleurs pas aux segments. Plusieurs méthodes étaient connues pour construire des polygones réguliers, c'est-à-dire des polygones dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles la même mesure. Ces polygones ont la particularité de pouvoir être *inscrit* dans un cercle et tout le monde se souvient sûrement d'avoir déjà construit un *hexa*gone en reportant l'écart du compas le long d'un cercle. Si l'on relie seulement un point sur deux, on obtient un triangle équilatéral, le polygone régulier ayant le plus petit nombre de sommets. Inversement, on peut à partir de ce même hexagone, obtenir le dodécagone (12 côtés). Il suffit pour cela de tracer les six rayons issus des sommets de l'hexagone. On obtient ainsi un partage régulier du disque en six secteurs d'angle 60º chacun puisque le tour complet représente 360º. En traçant les bissectrices de ces angles –ce qui est faisable à la règle et au compas comme nous l'avons vu– on créé six nouveaux points qui, avec les six premiers, forment le dodécagone. Ce processus simple qui permet de doubler le nombre de côtés d'un polygone se trouve dans Les Eléments d'Euclide, de même que les méthodes de construction des polygones à 3, 4, 5, 6 et 15 côtés. Le bien connu **Archimède** (-287;-212) appliquera ce principe jusqu'au polygone à 96 côtés ($96 = 6 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$) pour déterminer une valeur approchée de π .

On peut trouver surprenant le saut entre 6 et 15 qui laisse plusieurs valeurs non résolues. En fait, les cas 8 (octogone) et 10 (décagone) sont constructibles à partir du carré et du pentagone respectivement. Restent donc les cas 7, 9, 11, 13 et 14, ce dernier étant lié au premier puisque 14=2×7. Une première analyse des polygones construits par les Grecs semblent indiquer que le nombre de côtés doive être un diviseur de 360. Cela n'est a priori pas surprenant puisqu'il faut partager le disque en secteurs identiques comme on l'a vu pour l'hexagone. Cela éliminerait de suite les cas 7, 11 et 13 qui ne divisent pas 360. En revanche, le fait que les Grecs n'aient pas donné de méthode de construction pour le polygone à 9 côtés (ennéagone) est plus énigmatique. Cette construction est d'ailleurs directement liée à un problème célèbre identifié notamment par **Platon**, celui de **la trisection de l'angle.** En effet, si on trace les rayons issus des trois sommets du triangle équilatéral, on obtient trois angles (de 120º) et *il suffit* alors de partager chacun de ces angles en 3 (la trisection) pour obtenir six nouveaux points sur le cercle et donc le polygone à 9 côtés. Malheureusement construire les *tri*sectrices d'un angle à la règle et au compas est une tâche bien plus difficile que celle consistant à construire les bissectrices. Si difficile qu'elle résistera aux mathématiciens pendant plus de 2000 ans jusqu'en 1837, année où le jeune français **Pierre-Laurent Wantzel** (1814;1848) démontrera que ce problème est en fait impossible. Le polygone à 9 côtés (et par suite celui à 18 côtés) n'est donc pas constructible. Le résultat obtenu par Wantzel est en fait plus général et donne une condition pour qu'un nombre soit constructible. Son application aux polygones réguliers est aujourd'hui connu sous le nom de théorème de Gauss-Wantzel puisque le jeune **Carl Friedrich Gauss** (1777;1855) avait déjà effectué des avancées très sérieuses sur le sujet quelques années plus tôt, exhibant notamment dès 1796 une méthode de construction du polygone à 17 côtés !

Pour revenir plus précisément aux nombres constructibles, un résultat assez simple concernant "la" hauteur d'un triangle rectangle permet de justifier que la racine carrée de tout nombre constructible est constructible à la règle et au compas. Comme on l'a vu, « l'opération » racine carrée permet de créer une multitude de nombres réels. Lorsque cette opération est combinée avec les quatre autres (addition, soustraction, multiplication, division) et que les cinq sont appliquées aux nombres rationnels uniquement, on obtient un ensemble de nombres (appelés ***nombres calculables par racine carrée***) qui sont donc tous constructibles. C'est le cas par exemple des nombres $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{63}{25}\times\frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}$ rencontrés plus haut.

En revanche le nombre $\sqrt[3]{2}$ n'entre pas dans cette catégorie parce qu'il ne correspond pas à l'opérateur racine carrée mais à celui appelé « racine cubique ». Nous reviendrons sur cette nuance plus tard.

Pour les Grecs, le fait qu'un nombre ne soit pas calculable par racine carrée ne signifie pas pour autant qu'il n'est pas constructible. Pour être plus précis, les Grecs avaient démontré que tous les nombres calculables par racine carrée étaient constructibles mais pas l'inverse. D'ailleurs le dernier nombre cité intervient dans le deuxième grand problème de l'antiquité : **la duplication du cube**.

Le problème de la duplication du cube consiste à construire à la règle et au compas un cube dont le volume est le double de celui d'un cube donné. Rappelons que celui de la duplication du carré évoqué au tout début était celui qui avait donné naissance au nombre $\sqrt{2}$. En effet, un résultat assez simple dit que lorsqu'on multiplie toutes les longueurs d'un objet par un nombre k, toutes les aires sont multipliées par k^2 et tous les volumes par k^3. Par conséquent, pour que le volume d'un cube soit multiplié par 2, il faut que son arête soit multipliée par le nombre X tel $X^3 = 2$. C'est la définition exacte du nombre $\sqrt[3]{2}$ et si les Grecs se sont heurtés longtemps à ce problème, c'est encore une fois parce que le théorème de Wantzel affirme que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible.

Le théorème de Wantzel montre en fait qu'une condition <u>nécessaire</u> pour qu'un nombre soit constructible est qu'il soit solution d'un certain type d'équations dont nous reparlerons plus loin. Cette condition n'est pas <u>suffisante</u> et le nombre $\sqrt[3]{2}$, pourtant solution de l'équation $X^3 = 2$ n'est pas constructible.

Les deux autres questions concernent les solutions des équations. A priori, la troisième qui porte sur l'écriture des solutions d'une équation peut sembler moins essentielle que celle concernant l'existence et la nature de ces solutions. Pourtant les deux notions sont historiquement tellement liées l'une à l'autre qu'il est difficile de les traiter séparément.

C'est le grand mathématicien perse **Al-Khawarizmi** (780;850) qui fut le premier à chercher la résolution générale des équations du deuxième degré dans son traité <u>*Al Jabr wa l Muqabala*</u>, où l'on retrouve l'origine du mot algèbre.

Il donna ainsi une méthode pour résoudre les équations que l'on écrit aujourd'hui sous la forme :

$ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres rationnels quelconques.

La méthode du discriminant (enseignée aux élèves de 1ère dans le système français) permet de montrer que les solutions de ces équations sont :

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{et}$$

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ces solutions sont donc toujours des nombres ***calculables par radicaux*** à partir des coefficients a, b et c. On dit alors que ces équations sont résolubles par radicaux.

Cependant, un élève de 1ère sait aussi très bien que dans certains cas (lorsque le fameux discriminant est négatif) ces équations n'ont pas de solutions du tout. Des exemples simples tels que $X^2 + 2 = 0$ suffisent pour s'en convaincre puisque la règle de multiplication des nombres relatifs évoquée plus haut « interdit » à un carré d'être négatif.

On peut tout de même se demander si cette nouvelle impossibilité n'est pas similaire au problème de Pythagore qui ne trouvait pas de solution à l'équation $X^2 - 2 = 0$ simplement parce qu'il cherchait les solutions au mauvais endroit. Mais alors où chercher ? En fait, pendant longtemps, la question fut plutôt « Pourquoi chercher ? » car les nombres négatifs, comme on l'a vu, mirent du temps à se faire accepter.

La communauté mathématique considéra donc le problème des équations du second degré comme étant entièrement résolu et s'attaqua alors naturellement au suivant : celui des équations du troisième degré.

Les premiers résultats intéressants sont obtenus par **Omar Khayyam** (1048;1131) et **Al-Tusi** (1135;1213) deux autres génies de l'orient, mais il faudra attendre la renaissance italienne pour que le problème soit définitivement réglé.

L'histoire rocambolesque des découvertes successives des italiens **del** Ferro (1465;1526), **Tartaglia** (1499;1557), **Cardan** (1501;1576) et **Bombelli** (1526;1572) mériterait sans doute d'être racontée par Umberto Eco et pourrait en tout cas faire l'objet d'un autre article. Ce que l'on peut en retenir, c'est que les formules aujourd'hui attribuées à Cardan montrent que toutes les équations du troisième degré sont résolubles par radicaux.

A la même époque, **Ferrari** (1522;1565), un élève de Cardan, donne une méthode générale qui montre que toutes les équations du quatrième degré sont également résolubles par radicaux.

Avant de passer à l'étape suivante (les équations de degré cinq) il nous faut nous attarder quelques instants sur une découverte inattendue et pour le moins insolite faite par ces italiens du XVIe siècle. Cela est assez technique mais disons que pour écrire certaines des solutions sous la forme de celles données ci-dessus pour les équations du deuxième degré, ils ont parfois eu recours à des nombres « impossibles » tels que $\sqrt{-1}$ ou $\sqrt{-2}$. Pour donner un exemple plus concret considérons l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ pour laquelle on peut vérifier facilement que le nombre 4 est solution.. La méthode de Cardan indique qu'une solution de cette équation est donné par le nombre $u + v$ où u et v sont tels que $u^3 = 2 + \sqrt{-121}$ et $v^3 = 2 - \sqrt{-121}$. En utilisant des règles de calcul valables sur les nombres réels, Bombelli parvint à montrer que $u = 2 + \sqrt{-1}$ et $v = 2 - \sqrt{-1}$ retrouvant ainsi la solution $u + v = 4$.

Les mathématiciens du XVIIe et du XVIIIe siècle sont souvent réticents à accepter ces nombres. **Descartes** les qualifie d' « imaginaires » parce que pour lui, ils ne correspondent à aucune quantité et ne sont que des gadgets de calcul. Tel Pythagore, il ressent le besoin d'attribuer une réalité géométrique aux nombres.

Pourtant, un intérêt commence peu à peu à être reconnu à ces nombres, notamment parce qu'ils permettent de donner des solutions à un ensemble plus grand d'équations. Ainsi l'équation $x^2 + 2 = 0$ est maintenant *possible* si l’on accepte que ses solutions ne soient pas des nombres réels. On remarque aussi très rapidement que tous ces nouveaux nombres sont directement liés au plus simple de tous $\sqrt{-1}$ que l’on note « « **i** ». Aujourd’hui, l’ensemble de nombres qui contient les réels et les imaginaires est appelé l’ensemble des nombres complexes et est noté **C**.

Vers la fin du XVIIIe siècle, l’importance des nombres imaginaires s’accroit, à tel point que l’on commence à penser que cette « création » pourrait être la dernière, ou plus précisément que toutes les équations à coefficients réels auraient leurs solutions dans **C**. Le règne de l’impossible en théorie des équations prendrait alors fin.

En 1746, **D’Alembert** énonce le théorème suivant « **Tout polynôme non constant admet au moins une racine complexe.** » A l’époque, il était sous entendu que les coefficients du polynôme étaient des nombres réels mais la version reformulée actuelle qui porte le nom de *Théorème fondamental de l’algèbre* (ou théorème de D’Alembert-Gauss) élargit le résultat à tous les polynômes. Entre 1799 et 1849, **Gauss** donne pas moins de quatre démonstrations de ce théorème. Dans la première, le sujet de sa thèse de doctorat, il se montre très critique à propos des tentatives de ses prédécesseurs tels que Euler et Lagrange et tente au contraire de donner une réalité géométrique aux nombres complexes. Dans la théorie de l’algèbre moderne, le théorème signifie que **C** est **un corps algébriquement clos**, ce qui revient à dire que toute équation polynomiale (du type de celles que nous avons rencontrées jusqu’à présent) admet une solution (et même toutes ses solutions) dans l’ensemble des nombres complexes. Inutile de chercher ailleurs, inutile de créer d’autres nombres.

L’ensemble **R** n’est donc pas un corps algébriquement clos puisque pour trouver les solutions d’équations ayant des coefficients réels, il faut aller dans **C**. En fait, **C** est une clôture algébrique de **R**. C’est un résultat plus fort car il signifie également que **tout nombre complexe est solution d’un polynôme à coefficients réels.**

Cette notion de clôture algébrique est importante car elle donne la réponse à notre dernier problème concernant **les équations polynomiales à coefficients rationnels**. Pour mieux comprendre cela, résumons brièvement ce que nous avons établi jusqu'à présent :

1. **Le corps Q n'est pas algébriquement clos** car les solutions de certaines équations polynomiales à coefficients rationnels sont irrationnelles.
2. **Le corps R n'est pas une clôture algébrique de Q** car les solutions de certaines équations ne sont pas réelles.
3. Une clôture algébrique de **Q** est un corps qui contient toutes les solutions de ces équations et qui est inclus dans le corps **C** des nombres complexes, puisque **C** est algébriquement clos.

La question est donc de savoir si **C** est la clôture algébrique de **Q**, c'est-à-dire si chaque nombre complexe est solution d'une équation polynomiale à coefficients rationnels. C'est le français **Joseph Liouville** (1809;1882) qui démontrera en 1844 que ce n'est pas le cas, exhibant au passage quelques exemples de nombres « transcendants » comme les avait appelés **Leibniz**, pressentant leur existence.

Une distinction est ainsi effectuée au sein de l'ensemble des nombres réels (et aussi des nombres complexes) entre les nombres dits ***algébriques*** qui sont solutions d'une équation polynomiale à coefficients rationnels et les nombres transcendants qui ne le sont pas.

En 1882, l'allemand Ferdinand von Lindemann (1852;1939) démontre que le nombre π est transcendant. Cela met fin à tout espoir de résoudre le troisième et sûrement le plus connu des problèmes de l'antiquité, celui de *la quadrature du cercle.* Réputé difficile (et pour cause !), ce problème a attisé l'intérêt de plusieurs mathématiciens aussi bien amateurs que professionnels. Aujourd'hui l'expression est entrée dans le langage courant et désigne une tâche difficile ou impossible à réaliser. C'est toute la curiosité et la richesse des mathématiques qui font qu'un problème de géométrie vieux de plus de deux mille ans puisse être résolu par des outils résolument modernes rendus possibles par les progrès de l'algèbre. Ce sont souvent ce type de connections entre des domaines complètement différents qui sont à l'origine des grandes avancées en mathématiques.

Mais en quoi consiste donc cette fameuse quadrature ? Il s'agit *simplement* de construire à la règle et au compas (rappelons nous les exigences platoniennes) un carré ayant la même aire qu'un cercle donné. Pour que cela soit possible, il faut que le nombre π soit constructible. Or, le théorème de Wantzel déjà évoqué exige d'un nombre constructible, qu'il soit au moins algébrique. La preuve de Lindemann qui montre que π n'est pas algébrique, clôt définitivement la question.

Pour achever notre voyage dans le monde surprenant des nombres, il est nécessaire de récapituler les résultats obtenus jusqu'à maintenant :

1. Tous les nombres calculables ***par racine carrée*** sont constructibles, résultat connu des grecs.
2. Tous les nombres constructibles sont algébriques, conséquence du théorème de Wantzel
3. Tous les nombres algébriques ne sont pas constructibles, par exemple $\sqrt[3]{2}$.

Il est temps maintenant de revenir aux équations polynomiales que nous avions laissées entre les mains des Italiens du XVIe pour pouvoir répondre à cette dernière question :

Les solutions des équations polynomiales à coefficients rationnels (i.e. les nombres algébriques) sont-elles toutes calculables ***par radicaux*** ?

Les trois affirmations ci-dessus prouvent que les nombres algébriques ne sont pas tous calculables par racine carrée, sinon ils seraient constructibles. Cela ne suffit malheureusement par pour répondre à notre question car il existe une légère différence entre un nombre calculable *par racine carrée* et un nombre calculable *par radicaux*. Pour s'en convaincre il suffit de comparer les nombres p et q tels que $p^3 = 2$ et $q^4 = 2$. Le nombre q est appelée « racine quatrième de 2 » et est noté $\sqrt[4]{2}$. En remarquant que $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^4 = \left(\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, on voit que q est aussi la racine carrée de la racine carrée de 2. Cela signifie que q est calculable par racine carrée, et par conséquent constructible. Le nombre p est bien sûr la racine *cubique* de 2, noté $\sqrt[3]{2}$. Contrairement à q, il est impossible de calculer p à l'aide de racines carrées uniquement. En revanche, p est calculable ***par radicaux***, c'est-à-dire à l'aide d'une racine *n-ième* quelconque.